

به نام خدا

- مدولاسیون دیجیتال

* مدولاسیون M-ary PAM

$$x(t) = \sum_k a_k p(t - kD)$$

✓
صدای اظہار - دامنه‌های گسسته
پالس‌های مستقل مدولاسیون

بازه زمانی مدولاسیون

$P(t)$ پالس شکل‌دهی مدولاسیون است که می‌تواند مستطیلی یا هر شکل دیگری باشد ولی باید همواره زیر اثر قرار گیرد.

$$P(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t = \pm D, \pm 2D, \dots \end{cases}$$



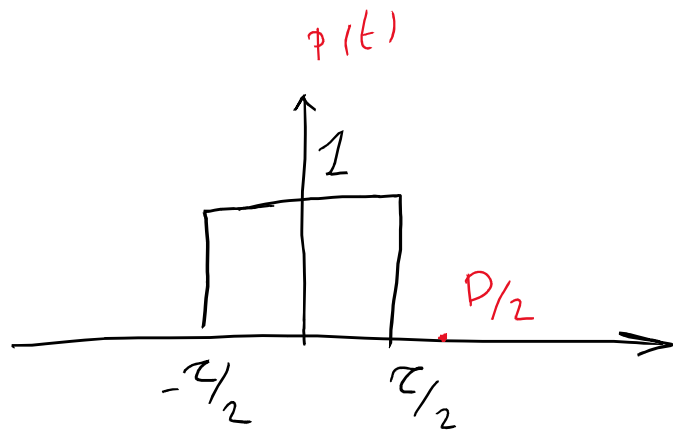
این شریقه تعیین می‌کند که در زمان‌های نمونه برداری
ارسالی در همان زمان را با ارسالی کرد.

به عنوان مثال: فرض کنیم در زمان $t = mD$ ، $x(t)$ نمونه برداری می‌کنیم

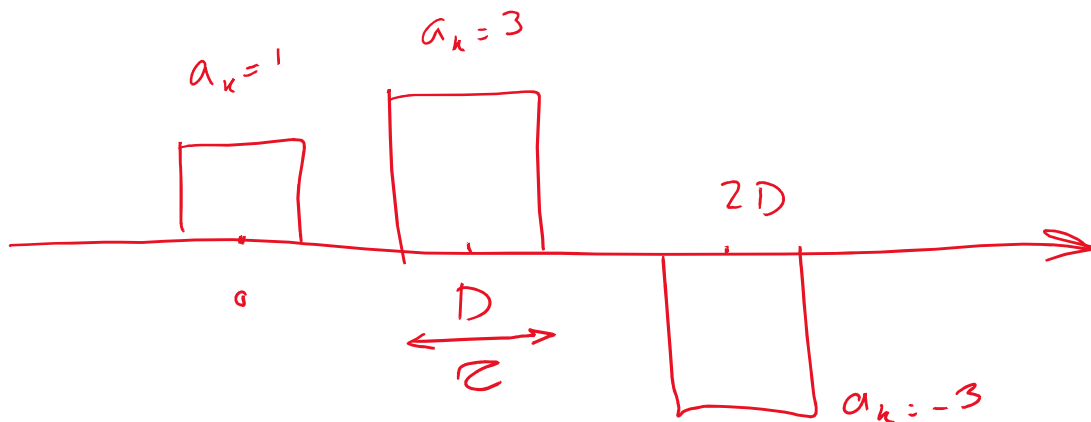
$$x(t) \Big|_{t=mD} = x(mD) = \sum_k a_k p(t - kD) \Big|_{t=mD} = \overset{1}{a_m p(0)} = a_m$$

$\uparrow$
 (0)

پالس مستطیل $p(t) = \pi \left(\frac{t}{\tau} \right)$, $\tau \leq D$ شرط $\textcircled{a}$ برآوردی کند.



یا هر شکل پالس دیگری که - از این $|t| \geq \frac{D}{2}$
برآوردی باشد، شرط $\textcircled{a}$ برآورده می کند.



$$x(t) = \sum_n a_n p(t - nD)$$

همان طور که گفتیم، D بازه زمانی یک بیت کامل در مدولاسیون M -ary PAM است. بنابراین نرخ ارسال بیت کامل ها برابر است با

$$r \equiv r_s = \frac{1}{D} \text{ Sym/s}$$

مبتداً به این دلیل هر بیت کامل دارای $k = \log_2 M$ بیت است، نرخ ارسال بیت را نیز می توان به صورت زیر بیان کرد.

$$r_b = k r = r \log_2 M \equiv \frac{1}{T_b} = \frac{k}{D}$$

که در آن T_b بازه زمانی یک بیت است، واضح است

$$T_b = \frac{D}{k} = \frac{D}{\log_2 M}$$

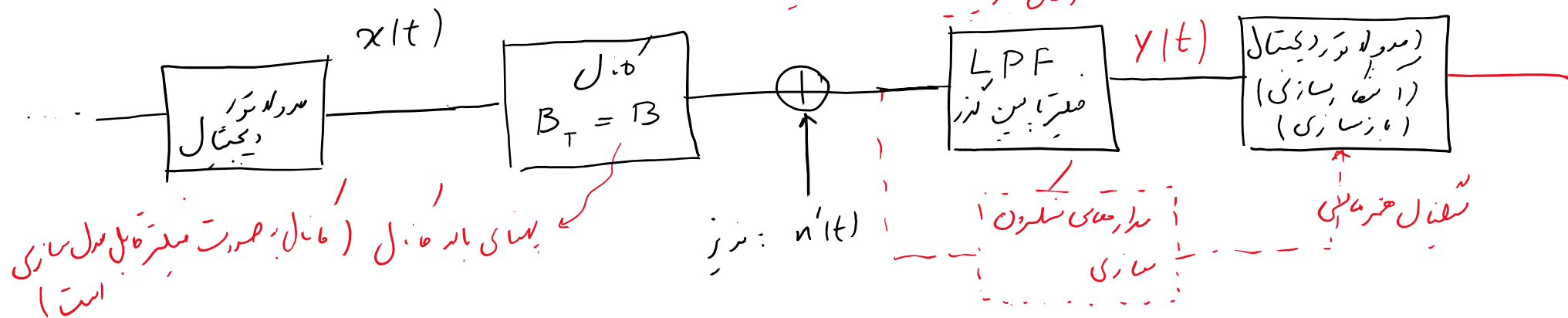
نمونه‌های ورودی

$$r = \frac{r_b}{k} = \frac{r_b}{M_{y_2}}$$

$$x(t) = \sum_k a_k p(t - kD)$$

$x(t)$ سیگنال ورودی شده PAM M -ary است که می‌خواهیم نسبت به سیستم برای این سیستم از سیستم‌های برای آن استفاده کنیم، به‌طور کلی‌تر می‌توانیم بگوییم که

ارسال آنرا به حذف سیگنال‌های خارج از باند



برای مدل‌های گرام مشخص شده، سگنال ارسال $x(t)$ پس از عبور از کانال، اضافه شدن نویز
 عبور از مدل‌های پایین گذر کننده (برای ایندکس‌های خارج از باند صرف شود) - ورودی دسر لایتر یا بلور
 بازسازی اطلاعات یا بلور آشکارسازی می‌رسد. سگنال درایستی در ورودی بلور آشکارساز را
 می‌توان به صورت زیر نوشت، نویز اضافه شده

$$y(t) = \sum_k a_k \tilde{p}(t - kD - t_d) + n(t)$$

تأخیر سگنال بین فرستنده و گیرنده
 با این مدل‌ها

$y(t)$ سیگنال در دسترس می‌باشد که در آن t میزان تأخر انتقال است
 یعنی تأخیری که در اثر انتقال سیگنال از فرستنده به گیرنده ایجاد می‌شود. در محدوده باند عبور سیگنال سازی
 تأخیر بسیار ضعیفی جریان می‌شود. $\tilde{P}(.)$ شکل پالس حامل فرکانس $P(t)$ از حامل، مدیر
 پایین گیرنده است. بنابراین در حالت هر دو این اعوجاج است. با شکل پالس ارسال $P(t)$
 متفاوت است. گیرنده (بلور آشکارساز) از سیگنال $y(t)$ در زمان‌های مناسب برای بار سازی

$$t_m = mD + t_d \quad \text{سکال ارسال } m^{\text{ام}} \text{ (یعنی } a_m)$$

از سیگنال $y(t)$ نمونه‌برداری می‌کند. از روی مقدار این نمونه سعی می‌کند که دامنه ارسال a_m
 را، بهترین میزان خطا، بازایی کند.

$$y(t) = \sum_k a_k \tilde{p}(t - kD - t_d) + n(t)$$

نمونه برداری
 $\xrightarrow{t_m = mD + t_d}$

$$y(t) \Big|_{t_m} = y(t_m) = \sum_k a_k \tilde{p}(mD + t_d - kD - t_d) + n(t_m)$$

نشان بده که این اصلاح یافته است که مقدار آن در نقاط $mD - kD$ لزوماً برابر صفر نیست (نقطه ۵ در بالا درج شده است)

$$\Rightarrow y(t_m) = \underbrace{a_m \tilde{p}(0)}_{\text{دسترسی به داده های مورد نیاز}} + \underbrace{\sum_{k \neq m} a_k \tilde{p}(mD - kD)}_{\text{اثر تداخل نمادهای مجاور بدی حاصل شود}} + \underbrace{n(t_m)}_{\text{نویز}}$$

$\tilde{p}(0) = 1$ / دسترسی به داده های مورد نیاز
 افاده حالت m امین نموده ارسال است

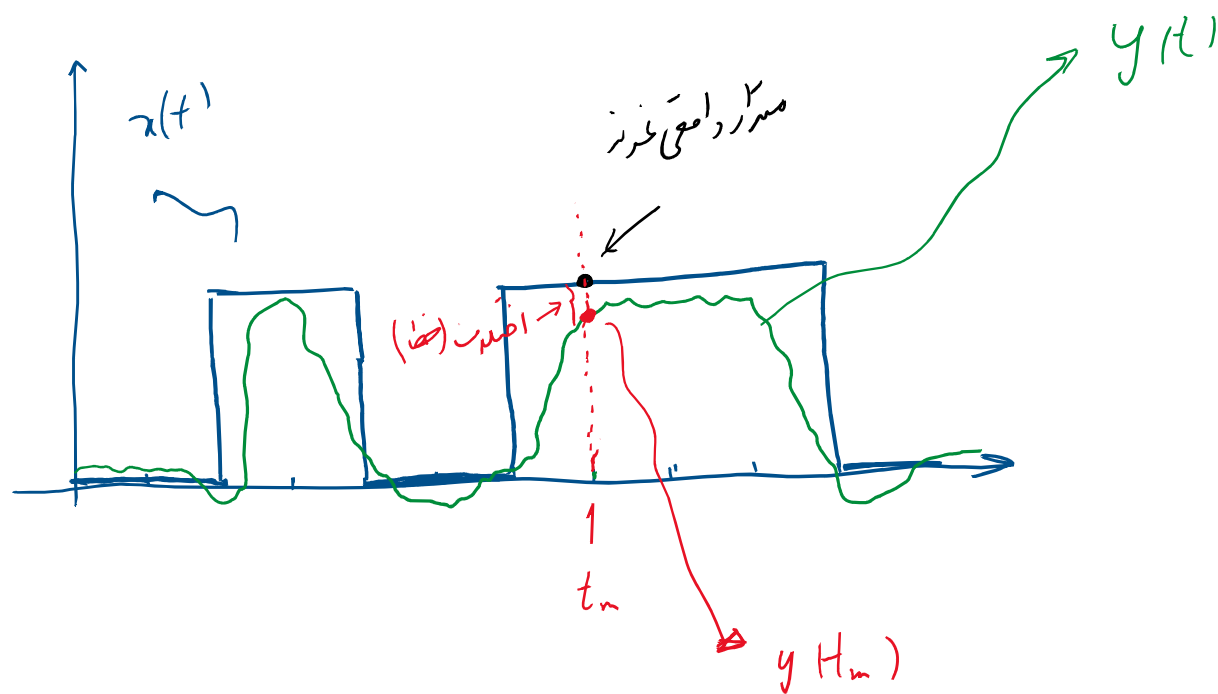
اثر تداخل نمادهای مجاور بدی حاصل شود

ISI

Intersymbol Interference

گیرنده از روی مقدار $y(t_m)$ سعی می‌کند که مقدار واقعی ارسال شده x_m را بازمایی کند ولی ورودی ورودی در تداخل باعث می‌شود که این عملیات با خطا همراه باشد

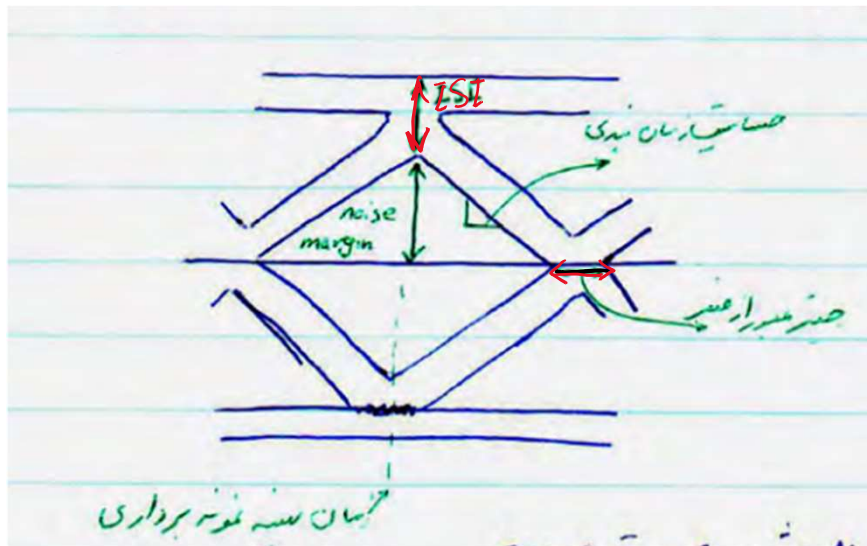
به عنوان مثال



نور در تداخل از مدارهای موجود در سیستم‌های کارایی در بازای این اعداد است.

بر اساس قضیه نایبرسیت اگر کانال با پهنای باند B اثر اطمینان را با نرخ r ، $r < 2B$ ،
ارسال کنیم ، می توانیم بدون هیچ رادون ISI . سگنال را فرستیم اما با نرخ r ، $r > 2B$ ،
وقوع ISI اجتناب ناپذیر است ، اگرچه امید در حضور نرادر ISI بازسازی اطمینان را
اتمام دهد . پس از ردتهای متداخل برای حذف یا کاهش ISI استفاده از $equalizer$
(همان سارا) است . در ادامه با فرض اینکه ISI وجود ندارد ، در حضور نرادر هم نمونه
بدون بازسازی اطمینان ، عملکرد آن را در حالت با پهنای بررسی خواهیم کرد .

اگر گذار چشمی $y(t)$ را روی اسلایسکوپ
 نگاه کنیم، شکل مشابهی در درخت حاصل می‌دهد.
 صرف ISI متبر باشد، نمودار چشمی با دقت
 فراصورت



* اگر سدر لایسول $M-ary$ باشد، $M-1$ چشم به صورت عمودی روی هم ظاهر می‌شوند.
 * اگر M غیر صحت باشد، هم خوردن نشان نمودار چشمی می‌شود.

در ادامه می خواهیم در مورد این اصداعات را در یک دستگاه ساز، در چند نواز جمع نموده بررسی کنیم. یعنی نمونه سیگنال در زمانی $y(t)$ در زمان نمونه برداری t_m به صورت زیر است.

$$y(t_m) = a_m \bar{p}(0) + n(t_m) = a_m + \underbrace{n(t_m)}_{n_m}$$

$$\bar{p}(0) = 1$$

برای سادگی روابط ابتدای فرض می کنیم که ارسال اصداعات در حالت باینری است ($M=2$)، پس نتایج

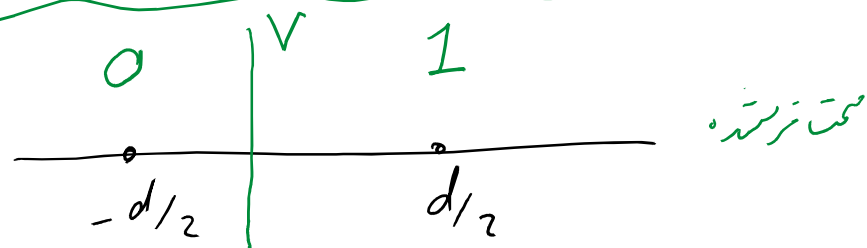
حاصل را به M حای باینری تعمیم می دهیم. n_m نمونه ندر سیگنال نویسی، مستقل از سیگنال است.

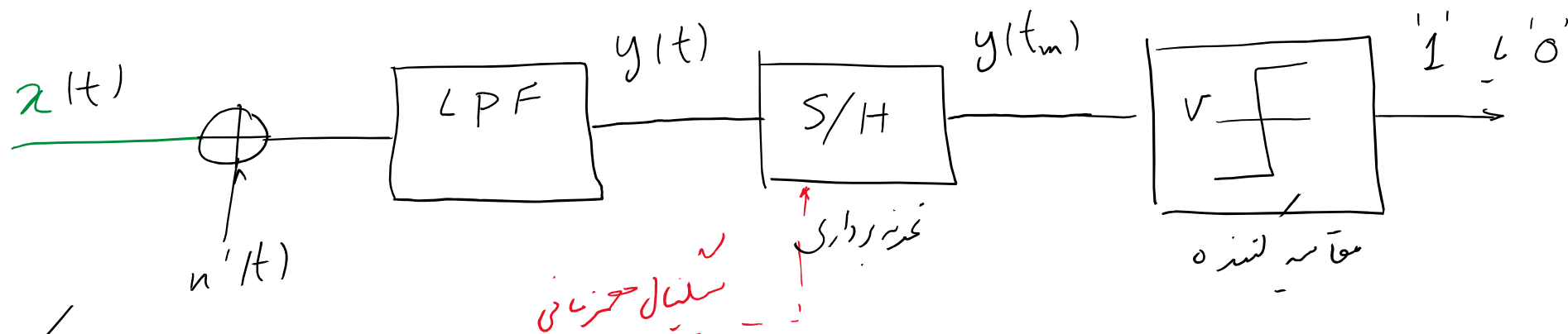
$$y(t_m) = a_m + n_m$$

در کدور بازسازی اصداعات $y(t_m)$ باید سطح است V متاسبی شود، براساس قانون تقسیم گیری زیر، بازسازی اصداعات انجام می شود.

$$\begin{cases} y(t_m) > V & \rightarrow \text{بیت '1' ارسال شده است} \\ y(t_m) < V & \rightarrow \text{بیت '0' ارسال شده است} \end{cases}$$

$$-d/2 < V < d/2$$





بر این اساس می توانیم بیش آمد خط را مشخص کنیم، احتمال خطای این گیرنده را محاسبه کنیم

بیش آمد خط = e = بیش آمد اندک بیت '0'، ارسال شده بامد و گیرنده اشتباه
 بیت '1' را اشتباهی کند یا بیت '0' ارسال شده بامد و
 گیرنده به اشتباه بیت '0' را اشتباهی کند

در ادامه، احتمال پیش آمد خطای کسبی کنیم (بر حسب ۷) و با می کنیم کردن احتمال خطای بازاری
اطلاعات سطح آستانه بهی برای تصمیم گیری رایانه است می آوریم

$$P_r\{e\} = \underbrace{P_r\{\text{بیت '۰' ارسال شده} \mid \text{بیت '۰' ارسال شده}\} P_r\{\text{بیت '۰' ارسال شود}\}}_{\text{بیت '۰' ارسال شود و اگر کند به اشتباه بیت '۱' را بازاری کند}} + P_r\{\text{بیت '۱' ارسال شده} \mid \text{بیت '۱' ارسال شده}\} P_r\{\text{بیت '۱' ارسال شود}\}$$

فصل احتمال می

برای ساده کردن نوشتار، پیش آمد های زیر را متریف می کنیم

H_0 : پیش آمد اینکه '۰' ارسال شده باشد

H_1 : پیش آمد اینکه '۱' ارسال شده باشد

$$\Rightarrow P_r \{e\} \triangleq P_e = \underbrace{P_r \{H_0\}}_{P_0} \underbrace{P_r \{e | H_0\}}_{P_r \{e | H_0\}} + \underbrace{P_r \{H_1\}}_{P_1} \underbrace{P_r \{e | H_1\}}_{P_r \{e | H_1\}}$$

$$\Rightarrow P_e = P_0 P_r \{e | H_0\} + P_1 P_r \{e | H_1\}$$

$$P_0 + P_1 = 1$$

$$\Rightarrow P_e = P_0 P_r \{y(t_m) > v | H_0\} + P_1 P_r \{y(t_m) < v | H_1\}$$

برای محاسبه ی احتمالات $y(t_m)$ به صورت یک متغیر تصادفی مدل سازی می کنیم

$$y(t_m) = a_m + n_m, \quad n_m \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \Rightarrow y = y(t_m) = a_m + n_m$$

$$\Rightarrow P_e = P_0 P_r \{ Y > v \mid H_0 \} + P_1 P_r \{ Y < v \mid H_1 \}$$

می دانیم که احتمال حرسش آمدی در ابتدا باید متغیر تصادفی برابر است با استدل تابع چگلی احتمال آن
در فضای همان پیش آمد. بنابراین برای محاسبه ی احتمالات فضای شرطی

$$P_r \{ Y > v \mid H_0 \} \quad , \quad P_r \{ Y < v \mid H_1 \}$$

لازم است ترا جاحتمال شرطی $P(Y|H_0)$, $P(Y|H_1)$, محاسبه کنیم

$$Y = a_m + n_m \quad , \quad n_m \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \equiv f_n(n) \quad \text{می دانیم}$$

$$a_m \in \{ \underset{\substack{\downarrow H_0 \\ \downarrow H_1}}{\alpha_1}, \alpha_2 \} \equiv_{\text{مقدار}} \{ -d/2, d/2 \}$$

$$\Rightarrow y = a_m + n_m$$

$$P(y|H_0) = f_n(y - \alpha_1) \underset{\substack{\uparrow \\ y = \alpha_1 + n_m}}{=} \underset{n_m \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y - \alpha_1)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$P(y|H_1) = f_n(y - \alpha_2) \underset{\substack{\uparrow \\ y = \alpha_2 + n_m}}{=} \underset{n_m \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y - \alpha_2)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\Rightarrow P_e = P_0 P_r \{Y > V | H_0\} + P_1 P_r \{Y < V | H_1\}$$

$$P_e = P_0 \int_V^{\infty} P(y|H_0) dy + P_1 \int_{-\infty}^V P(y|H_1) dy$$

P_e, V_{opt}

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial V} P_e = 0$$

$$- P_0 P(y|H_0) \Big|_{V=V_{opt}} + P_1 P(y|H_1) \Big|_{V=V_{opt}} = 0$$

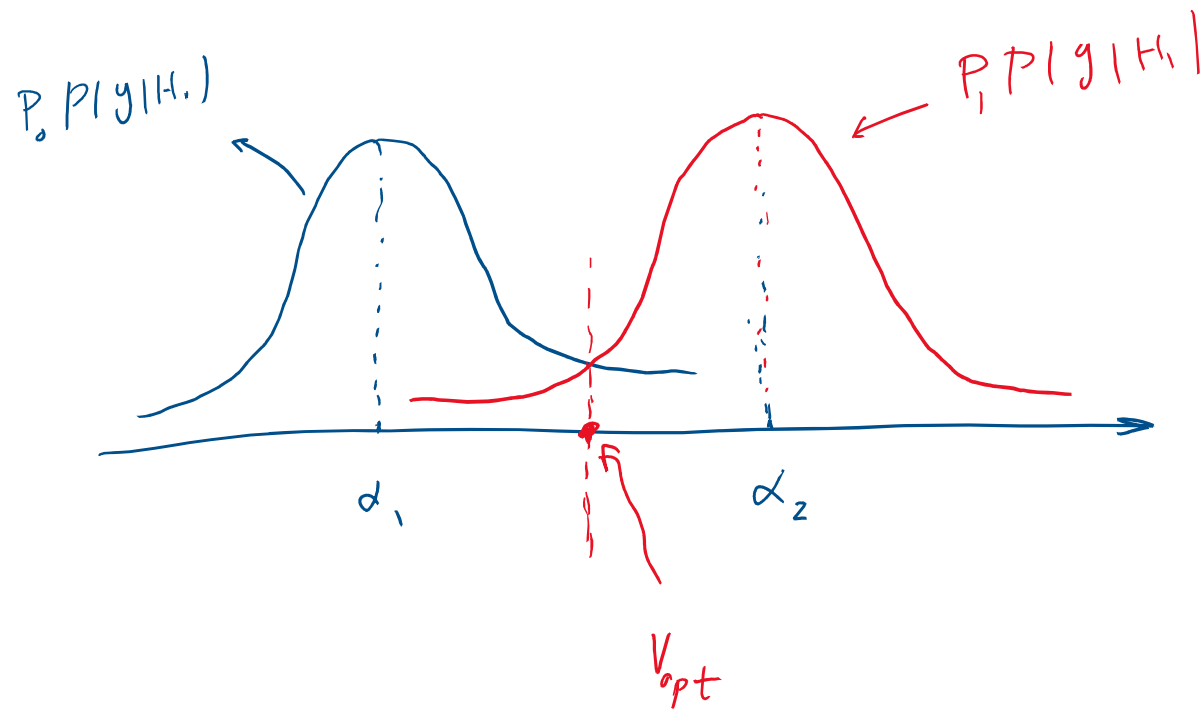
$$\Rightarrow P_0 P(y|H_0) \Big|_{V=V_{opt}} = P_1 P(y|H_1) \Big|_{V=V_{opt}} \quad (1)$$

V_{opt} صدای است که وقتی براساس آن تصمیم گیری می شود. کمترین احتمال خطا را به دست می دهد

$$\left\{ \begin{array}{l} y(t_m) > V_{opt} \rightarrow H_1 \\ y(t_m) < V_{opt} \rightarrow H_0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{احتمال خطای نهم است}$$

V_{opt} از نظر معیار ① - درست می آید.

در رانج V_{opt} کل بر خور درستی $P_0 P(y|H_0)$, $P_1 P(y|H_1)$ است



$$P_e = P_0 P_r \{e | H_0\} + P_1 P_r \{e | H_1\}$$

$$P_{e_{\min}} = P_0 P_r \{ \gamma > \gamma_{opt} | H_0 \} + P_1 P_r \{ \gamma < \gamma_{opt} | H_1 \}$$

در ادامه برای $P_0 = P_1 = \frac{1}{2}$ ، بازنه‌نندری گوسی $n_m \sim N(0, \sigma^2)$

می‌فراهم سطح است. بهینه ، احتمال خطای کمینه را می‌دهد

(حالتی که $P_0 = P_1$ برقرار نباشد ، به عنوان تمرین انجام دهید)

* به دست آوردن V_{opt} در حالت $P_0 = P_1 = \frac{1}{2}$

$$\cancel{P_0} P(y|H_0) \Big|_{V=V_{opt}} = \cancel{P_1} P(y|H_1) \Big|_{V=V_{opt}}$$

V_{opt} مثل برضور $P(y|H_0)$ ، $P(y|H_1)$ خالصه بود

$$P(y|H_0) \Big|_{V=V_{opt}} = P(y|H_1) \Big|_{V=V_{opt}}$$

از طرف دیگر داریم

$$P(y|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y-\alpha_1)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$P(y|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y-\alpha_2)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y-\alpha_1)^2}{2\sigma^2}\right) \bigg|_{V=V_{opt}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y-\alpha_2)^2}{2\sigma^2}\right) \bigg|_{V=V_{opt}}$$

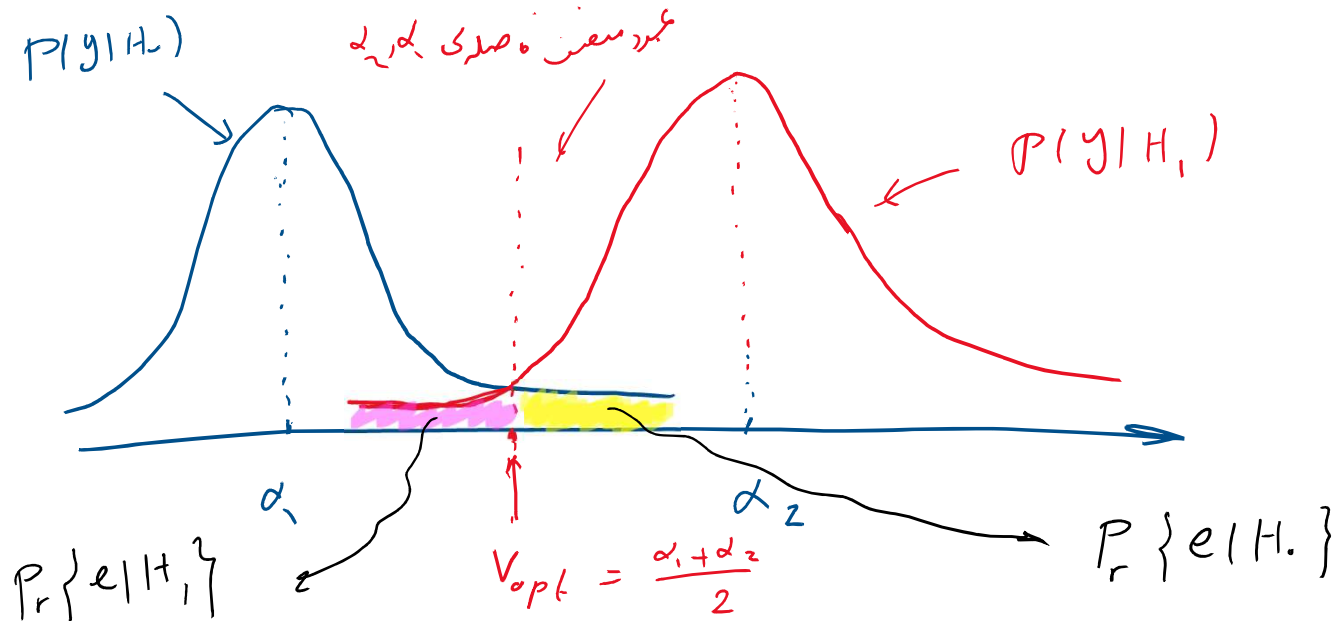
از طرفین با هم ترکیب

$$\underbrace{(y - \alpha_1)^2}_{y^2 + \alpha_1^2 - 2\alpha_1 y} = \underbrace{(y - \alpha_2)^2}_{y^2 + \alpha_2^2 - 2\alpha_2 y} \Big|_{V=V_{opt}}$$

$$\rightarrow V_{opt} = \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{2(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

$$\Rightarrow V_{opt} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$

سطوح استانه‌ها، سو در سبیل است



(شکل حالت تداخل دارد)

$$\left\{ \begin{array}{l} y(t_m) > \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = V_{opt} \longrightarrow H_1 \\ y(t_m) < \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = V_{opt} \longrightarrow H_0 \end{array} \right. \quad \left(\text{قانون تصمیم گیری ساده} \right)$$

منظر، از سبب معنی بالکدین احتمال خط
احتمال مفای این گرفته به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} P_e &= P_0 P_r \{ y > V_{opt} \mid H_0 \} + P_1 P_0 \{ y < V_{opt} \mid H_1 \} \\ &= P_0 P_r \{ e \mid H_0 \} + P_1 P \{ e \mid H_1 \} \end{aligned}$$

$$P_0 = P_1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow$$

$$P_e = \frac{1}{2} \left(\int_{V_{opt}}^{\infty} P(y|H_0) dy + \int_{-\infty}^{V_{opt}} P(y|H_1) dy \right)$$

$$P(y|H_0) = f_n(y - \alpha_1) \equiv N(0, \sigma_1)$$

$$P(y|H_1) = f_n(y - \alpha_2) \equiv N(0, \sigma_2)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_r\{e|H_0\} &= \int_{V_{opt}}^{\infty} P(y|H_0) dy = P_r\{e|H_1\} = \int_{-\infty}^{V_{opt}} P(y|H_1) dy \\ &= Q\left(\frac{|V_{opt} - \alpha_1|}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{|\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}|}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

$$P_s = P_r = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow P_e = P_r \{e|H_s\} = P_r \{e|H_1\} = Q\left(\frac{|d_1 - d_2|}{2\sigma}\right)$$

$$|d_1 - d_2| = d_{12} \equiv \text{فاصله انتگرالی بین دو سیگنال است}$$